유효숫자 다루기

1. 유효숫자와 측정도구의 정밀도(precision)

원주율 $\pi = 3.1415\cdots$ 또는 자연대수 $e = 2.7182\cdots$와 같은 정의된 값들은 오차가 없고 유효숫자의 갯수가 무한대라고 할 수 있다. 또는 $S = \frac{1}{2}(x+y)h$와 같은 공식에서 정수 2 역시 유효숫자의 갯수가 무한대라고 할 수 있다. 이에 비해 실험에서 얻은 측정값의 유효숫자의 갯수는 측정도구의 정밀도와 밀접한 관계가 있다. 예를 들어 정확한 길이가 $12.345\ \mathrm{mm}$인 물체가 있다고 하자.

a) 최소눈금이 $1\ \mathrm{mm}$인 자로 측정하면 이 물체의 길이는 $12\ \mathrm{mm}$와 $13\ \mathrm{mm}$ 사이에 있을 것이다. 이것을 어림짐작해서 얻은 측정값이 $12.5\ \mathrm{mm}$라고 하면 소수점아래 첫째자리인 5는 불확실한 값이 된다. 그러므로 $12.56\ \mathrm{mm}$라고 하면 소수점아래 첫째자리인 5도 불확실한 값인데 소수점아래 둘째자리인 6은 더할 나위 없이 의미가 없는 숫자가 된다. 따라서 의미 있는 숫자, 즉 유효숫자는 $12.5\ \mathrm{mm}$가 된다. 이와 같이 유효숫자에서 맨 마지막 자리는 불확실한 값이 되고, 불확실한 값까지 포함하여 유효숫자의 갯수를 고려한 측정값이 $12.5\ \mathrm{mm}$라 하면 유효숫자는 3개가 된다. 즉 유효숫자의 갯수를 셀 때 소수점은 고려하지 않는다.

b) 최소눈금이 $0.05\ \mathrm{mm}$인 버니어 캘리퍼스로 측정하면 이 물체의 길이는 $12.30\ \mathrm{mm}$와 $12.35\ \mathrm{mm}$ 사이에 있을 것이다. 이것을 어림짐작해서 얻은 측정값이 $12.33\ \mathrm{mm}$라고 하면 소수점아래 둘째자리인 3은 불확실한 값이 되고, 유효숫자는 4개가 된다.

c) 최소눈금이 $0.01\ \mathrm{mm}$인 마이크로미터로 측정하면 이 물체의 길이는 $12.34\ \mathrm{mm}$와 $12.35\ \mathrm{mm}$ 사이에 있을 것이다. 이것을 어림짐작해서 얻은 측정값이 $12.342\ \mathrm{mm}$라고 하면 소수점아래 셋째자리인 2는 불확실한 값이 되고, 유효숫자는 5개가 된다.

2. 유효숫자에서 0의 취급

a) 숫자 앞쪽에 있는 0은 의미가 없다. 예를 들어 질량이 $1.23\ \mathrm{g}$인 물체가 있다고 하자. 이 물체의 질량을 $01.23\ \mathrm{g}$ 또는 $001.23\ \mathrm{g}$이라고 쓴다면 숫자 앞에 있는 0은 불필요하다는 것을 쉽게 알 수 있으며, $1.23\ \mathrm{g}$에서 유효숫자는 3개가 된다. 만일 질량의 단위를 g에서 kg으로 바꿔서 이 물체의 질량을 $0.00123\ \mathrm{kg}$이라고 쓴다면 마찬가지로 소수점아래 셋째자리인 1 앞에 있는 0들은 유효숫자에 포함되지 않으므로 $0.00123\ \mathrm{kg}$에서 유효숫자는 3개가 된다.

b) 숫자 중간에 있는 0은 당연히 의미가 있다. 예를 들어 질량이 $0.00901\ \mathrm{kg}$이라고 하면 소수점아래 넷째자리인 0은 유효숫자로서 취급되므로 $0.00901\ \mathrm{kg}$에서 유효숫자는 3개가 된다.

c) 그러나 숫자 뒤쪽에 있는 0은 경우에 따라 의미가 있을 수도 있고 없을 수도 있다. 예를 들어 거리가 $123000\ \mathrm{m}$라고 하면 어디까지가 유효숫자인지 명확하게 알 수 없다. 이런 경우에는 측정값을 다음과 같이 지수형태로 나타내어 유효숫자의 갯수를 명확히 표시한다.

$123000\ \mathrm{m}\ \rightarrow$
유효숫자 3개 : $1.23\times10^{5}\ \mathrm{m}$
유효숫자 4개 : $1.230\times10^{5}\ \mathrm{m}$
유효숫자 5개 : $1.2300\times10^{5}\ \mathrm{m}$

d) 한편 숫자 뒤쪽에 있지만 소수점아래에 있는 0은 모두 의미가 있는 숫자이다.

$1.23\ \mathrm{g}\ \rightarrow$
유효숫자 3개 : $1.23\ \mathrm{g}$
유효숫자 4개 : $1.230\ \mathrm{g}$
유효숫자 5개 : $1.2300\ \mathrm{g}$

$0.00123\ \mathrm{kg}\ \rightarrow$
유효숫자 3개 : $0.00123\ \mathrm{kg} = 1.23\times10^{-3}\ \mathrm{kg}$
유효숫자 4개 : $0.001230\ \mathrm{kg} = 1.230\times10^{-3}\ \mathrm{kg}$
유효숫자 5개 : $0.0012300\ \mathrm{kg} = 1.2300\times10^{-3}\ \mathrm{kg}$

3. 유효숫자의 계산

a) 길이가 각각 $12.3\ \mathrm{mm}$와 $4.56\ \mathrm{mm}$인 두 물체의 길이를 더한다고 하자. 이때 불확실한 값을 빨간색으로 표시하고 더해주면 다음과 같다.

$$12.3 + 4.56 = 16.86\ \mathrm{mm}$$

즉 $12.3\ \mathrm{mm}$에서 소수점아래 첫째자리인 3이 불확실한 값이기 때문에 $4.56\ \mathrm{mm}$가 더 정밀하게 측정되었음에도

불구하고 두 값을 더해준 결과에서는 소수점아래 첫째자리인 8부터 불확실한 값이 나타나게 된다. 더해준 결과에서 소수점아래 첫째자리인 8이 불확실한 값이므로 소수점아래 둘째자리인 6은 더할 나위 없이 의미가 없는 숫자가 된다. 따라서 소수점아래 둘째자리에서 반올림해서 더해준 결과는 다음과 같다.

$$12.3 + 4.56 = 16.86 \rightarrow 16.9\ \text{mm}$$

또는

$$12.3 + 4.56 \rightarrow 12.3 + 4.6 = 16.9\ \text{mm}$$

즉 소수점아래 첫째자리까지 있는 값과 소수점아래 둘째자리까지 있는 값을 더해준 결과는 소수점아래 첫째자리까지 있는 값이 된다. 일반적으로 덧셈 또는 뺄셈을 할 때는 두 숫자에서 소수점아래 자리가 적은 쪽으로 유효숫자를 일치시켜 준다. 이러한 이유로 두 측정값을 덧셈 또는 뺄셈을 하게 되는 경우에는 두 측정값을 같은 절대적 정밀도로, 즉 소수점아래 자리가 같게 측정하는 것이 중요하다는 것을 알 수 있다. 또한 반올림을 계산 최종 과정에서 또는 중간 과정에서 적용할 지가 문제인데, 계산 중간 과정에서 있을 수 있는 반올림 축적 오차를 없애기 위해 계산 최종 과정에 반올림하는 것이 바람직하다. 일반적으로 반올림은 반올림하려는 자릿수가 0에서 4이면 버리고, 5에서 9이면 앞의 자릿수를 1 올려주는 것을 원칙으로 한다.

b) 가로와 세로의 길이가 각각 $12.3\ \text{mm}$와 $4.567\ \text{mm}$인 직사각형의 넓이를 구한다고 하자. 불확실한 값을 빨간색으로 표시하고 계산하면 다음과 같다.

$$12.3 \times 4.567 = 56.1741\ \text{mm}^2$$

즉 $12.3\ \text{mm}$에서 앞에서 세번째 숫자인 3이 불확실한 값이기 때문에 $4.567\ \text{mm}$가 앞에서 네번째 숫자가 불확실한 값임에도 불구하고 두 값을 곱해준 결과에서는 앞에서 세번째 숫자부터 불확실한 값이 나타나게 된다. 따라서 반올림하여 앞에서 세번째 숫자까지 나타내고 곱해준 결과는 다음과 같다.

$$12.3 \times 4.567 = 56.1741 \rightarrow 56.2\ \text{mm}^2$$

또는

$$12.3 \times 4.567 \rightarrow 12.3 \times 4.57 = 56.211 \rightarrow 56.2\ \text{mm}^2$$

즉 유효숫자가 3개인 값과 유효숫자가 4개인 값을 곱해준 결과는 유효숫자가 3개인 값이 된다. 일반적으로 곱셈 또는 나눗셈을 할 때는 두 숫자에서 유효숫자의 갯수가 적은 쪽으로 유효숫자를 일치시켜 준다. 이러한 이유로 두 측정값을 곱셈 또는 나눗셈을 하게 되는 경우에는 두 측정값을 같은 상대적 정밀도로, 즉 크기가 작은 값을 더 정밀하게 측정하여 유효숫자의 갯수가 같게 측정하는 것이 중요하다는 것을 알 수 있다.

c) 제곱근, $\sin$, $\cos$, $\exp$, $\log$와 같은 함수 계산들은 곱셈 또는 나눗셈에 준해서 유효숫자의 갯수가 같도록 계산하면 된다.

4. 실험값으로부터 유효숫자의 계산

a) 실험에서 물리량 X를 N번 측정한 실험값을

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$$

이라고 하자. 이들 N개의 실험값으로부터 구한 물리량의 평균은 $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$이고, 샘플 표준편차는 $\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X})^2}$ 이다. 이때 측정의 불확도(uncertainty)는 $u = \frac{\sigma_s}{\sqrt{N}}$이고, 이를 이용하여 실험값은 $X = \overline{X} \pm u$로 표현한다.

b) 예를 들어 $30\ \text{cm}$ 자로 10번 측정한 연필의 길이가

$$X = \{10.1,\ 9.8,\ 9.9,\ 10.2,\ 10.1,\ 9.8,\ 10.2,\ 9.8,\ 10.1,\ 10.1\}\ \text{cm}$$

를 얻었다고 하자. 이때 평균은 $\overline{X} = 10.0100\ \text{cm}$이고, 샘플 표준편차는 $\sigma_s = 0.1663\ \text{cm}$이며, 불확도는 $u = 0.0526\ \text{cm}$임을 알 수 있다.

c) 유효숫자를 구하기 위해 불확도에서 0이 아닌 숫자가 2개가 되도록 반올림하여 $u = 0.053\ \text{cm}$를 얻는다. 평균은 불확도에서 취한 소수점아래 0이 아닌 두번째 자리까지 반올림하여 $\overline{X} = 10.010\ \text{cm}$를 얻는다. 그러면 항상 유효숫자의 갯수가 평균의 자릿수보다 한 자리 작게 된다. 위의 예에서는 유효숫자가 4개인 실험을 한 것을 알 수 있다. 실험값은 "$X = 10.010 \pm 0.053\ \text{cm}$이다"와 같이 보고한다.