여러 물체의 회전관성 유도

1-1. 회전관성(rotational inertia, moment of inertia)의 정의

$I = mr^2$
m : 물체의 질량
r : 회전축에서 물체까지의 거리

이산적인 질량분포(discrete mass distribution)의 경우
$I = \sum_i m_i r_i^2$
m_i : i번째 물체의 질량
r_i : 회전축에서 i번째 물체까지의 거리

연속적인 질량분포(continuous mass distribution)의 경우
$I = \int r^2 dm$
dm : 물체의 형태에 따라 미소길이요소(differential line element), 미소면적요소(differential area element) 또는 미소부피요소(differential volume element)의 질량
r : 회전축에서 미소길이요소, 미소면적요소 또는 미소부피요소까지의 거리

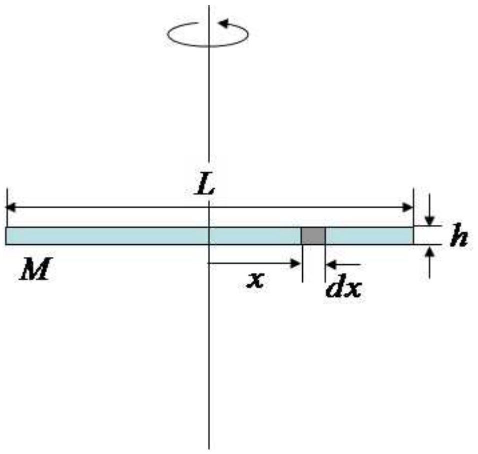
1-2. 평행축 정리(parallel axis theorem)

$I = I_{cm} + Ml^2$
I_{cm} : 물체의 질량 중심(center of mass, cm)을 통과하는 회전축에 대한 회전관성
I : 물체의 질량중심을 통과하는 회전축으로부터 평행이동한 새로운 회전축에 대한 회전관성
M : 물체의 질량
l : 회전축이 평행이동한 거리

1-3. 수직축 정리(perpendicular axis theorem)

물체의 질량이 XY 평면에 분포할 때 다음이 성립한다.
$I_Z = I_X + I_Y$
I_X : X축을 회전축으로 하였을 때 물체의 회전관성
I_Y : Y축을 회전축으로 하였을 때 물체의 회전관성
I_Z : Z축을 회전축으로 하였을 때 물체의 회전관성
※ 수직축 정리는 물체의 질량이 XY평면과 같이 한 평면에 분포하는 경우, 즉 평판 형태(planar body)의 물체에만 성립한다. 물체의 질량이 한 평면에서 벗어나서 분포할 때는 성립하지 않는다는 점에 주의한다.

2-1. 막대(straight rod)의 회전관성



질량 M, 길이 L (높이 h는 무시)

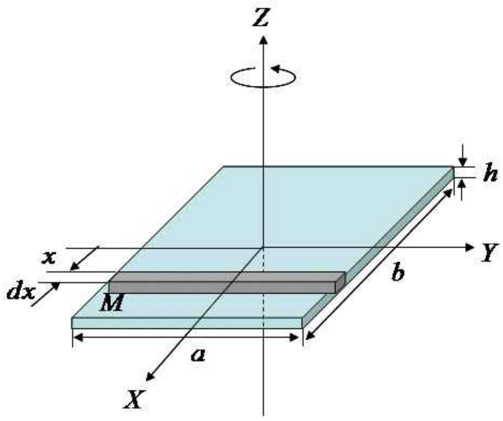
단위 길이당 질량 = 선밀도 = $\mu_m = \frac{M}{L} =$ 일정

중심에서 x만큼 떨어져있고 길이가 dx인 미소길이요소의 질량
$dm = \mu_m dx$
미소길이요소의 회전관성 $dI = x^2 dm = \mu_m x^2 dx$

막대의 회전관성

$$I = \int dI = \int_{-L/2}^{L/2} \mu_m x^2 dx = 2\mu_m \int_0^{L/2} x^2 dx$$
$$= 2\mu_m \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} = 2\frac{M}{L}\frac{L^3}{24} = \frac{1}{12}ML^2$$

2-2. 직사각형판(rectangular plate)의 회전관성



질량 M, 가로 a, 세로 b (높이 h는 무시)

<방법 1 : 막대의 회전관성과 평행축 정리 이용>

단위 면적당 질량 = 면밀도 = $\sigma_m = \dfrac{M}{ab} =$ 일정

중심에서 x만큼 떨어져있고 가로가 a, 세로가 dx인 미소면적요소의 질량

$dm = \sigma_m a dx$

미소면적요소는 질량이 dm, 길이가 a인 막대로 볼 수 있으므로 $x=0$일 때 미소면적요소의 회전관성은 다음과 같다.

$$dI_{cm} = \frac{1}{12}(dm)a^2 = \frac{1}{12}\sigma_m a^3 dx$$

평행축 정리를 적용하면 $x \neq 0$일 때 미소면적요소의 회전관성은 다음과 같다.

$$dI = dI_{cm} + x^2 dm = \frac{1}{12}\sigma_m a^3 dx + \sigma_m a x^2 dx = \sigma_m a\left(\frac{a^2}{12} + x^2\right)dx$$

직사각형판의 회전관성

$$I = \int dI = \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_m a\left(\frac{a^2}{12} + x^2\right)dx = 2\sigma_m a \int_0^{b/2}\left(\frac{a^2}{12} + x^2\right)dx$$

$$= 2\sigma_m a\left[\frac{a^2}{12}x + \frac{x^3}{3}\right]_0^{b/2} = 2\frac{M}{ab}a\left(\frac{a^2 b}{24} + \frac{b^3}{24}\right) = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

<방법 2 : 수직축 정리 이용>

X축을 회전축으로 하였을 때 질량 M, 길이 a, 높이 b인 막대로 볼 수 있으므로 회전관성은 $I_X = \dfrac{1}{12}Ma^2$이고,

Y축을 회전축으로 하였을 때 질량 M, 길이 b, 높이 a인 막대로 볼 수 있으므로 회전관성은 $I_Y = \dfrac{1}{12}Mb^2$이므로

수직축 정리를 적용하면 Z축을 회전축으로 하였을 때 회전관성은 $I_Z = I_X + I_Y = \dfrac{1}{12}M(a^2+b^2)$이다.

<방법 3 : 직교좌표계(rectangular coordinates)와 중적분 이용>

중심에서 X축을 따라서 x만큼 떨어져있고 Y축을 따라서 y만큼 떨어져있는 가로 dx, 세로 dy의 미소면적요소의 질량

$dm = \sigma_m dx dy$

미소면적요소의 회전관성 $dI = \rho^2 dm = \sigma_m (x^2+y^2) dx dy$

직사각형판의 회전관성

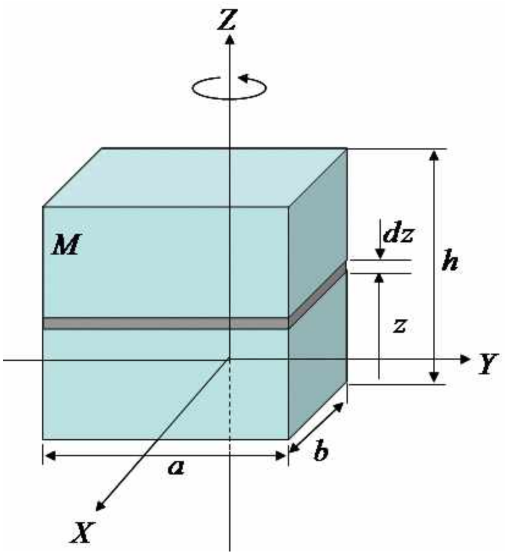
$$I = \int dI$$

$$= \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} \sigma_m (x^2+y^2) dx dy = 4\sigma_m \int_0^{b/2}\int_0^{a/2}(x^2+y^2) dx dy$$

$$= 4\sigma_m \int_0^{b/2}\left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_0^{a/2} dy = 4\sigma_m \int_0^{b/2}\left(\frac{a^3}{24} + \frac{a}{2}y^2\right)dy$$

$$= 4\sigma_m\left[\frac{a^3}{24}y + \frac{a}{6}y^3\right]_0^{b/2} = 4\frac{M}{ab}\left(\frac{a^3 b}{48} + \frac{ab^3}{48}\right) = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

2-3. 직육면체(rectangular parallelepiped)의 회전관성



질량 M, 가로 a, 세로 b, 높이 h

<방법 1 : 직사각형판의 회전관성 이용>

단위 부피당 질량 = 밀도 = $\rho_m = \dfrac{M}{abh} = $ 일정

직육면체의 밑면이 XY평면에 있다고 하고, XY평면으로부터 z 만큼 떨어져있고 높이가 dz인 미소부피요소의 질량

$dm = \rho_m abdz$

미소부피요소는 질량이 dm, 가로 a, 세로 b인 직사각형판으로 볼 수 있으므로 미소부피요소의 회전관성은 다음과 같다.

$$dI = \frac{1}{12}(dm)(a^2+b^2) = \frac{1}{12}\rho_m ab(a^2+b^2)dz$$

직육면체의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^h \frac{1}{12}\rho_m ab(a^2+b^2)dz = \frac{1}{12}\rho_m ab(a^2+b^2)\int_0^h dz$$
$$= \frac{1}{12}\rho_m ab(a^2+b^2)[z]_0^h = \frac{1}{12}\frac{M}{abh}ab(a^2+b^2)h = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

<방법 2 : 직교좌표계와 3중적분 이용>

중심에서 X축을 따라서 x만큼 떨어져있고 Y축을 따라서 y만큼 떨어져있고 Z축을 따라서 z만큼 떨어져있는 가로 dx, 세로 dy, 높이 dz의 미소부피요소의 질량

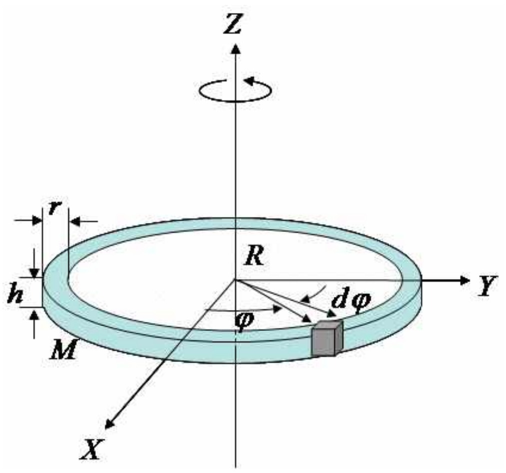
$dm = \rho_m dxdydz$

미소부피요소의 회전관성 $dI = \rho^2 dm = \rho_m(x^2+y^2)dxdydz$

직육면체의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^h \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\rho_m(x^2+y^2)dxdydz$$
$$= 4\rho_m \int_0^{b/2}\int_0^{a/2}(x^2+y^2)dxdy\int_0^h dz$$
$$= 4\rho_m \int_0^{b/2}\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_0^{a/2}dy\int_0^h dz = 4\rho_m\int_0^{b/2}\left(\frac{a^3}{24}+\frac{a}{2}y^2\right)dy\int_0^h dz$$
$$= 4\rho_m\left[\frac{a^3}{24}y+\frac{a}{6}y^3\right]_0^{b/2}[z]_0^h = 4\frac{M}{abh}\left(\frac{a^3b}{48}+\frac{ab^3}{48}\right)h = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

3-1. 원형고리(circular ring)의 회전관성



질량 M, 반지름 R (폭 r과 높이 h는 무시)

단위 길이당 질량 = 선밀도 = $\mu_m = \dfrac{M}{2\pi R} = \text{일정}$

X축으로부터 각도로 φ만큼 떨어져있고 폭이 $d\varphi$인 미소길이요소의 질량

$dm = \mu_m R d\varphi$

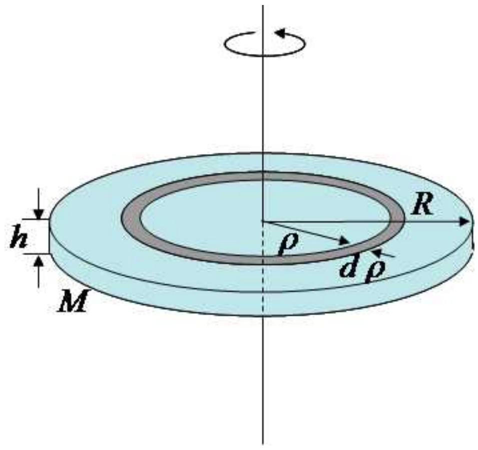
미소길이요소의 회전관성

$dI = R^2 dm = \mu_m R^3 d\varphi$

원형고리의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi} \mu_m R^3 d\varphi = \mu_m R^3 [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{M}{2\pi R} R^3 2\pi = MR^2$$

3-2. 원판(circular plate)의 회전관성



질량 M, 반지름 R (높이 h는 무시)

<방법 1 : 원형고리의 회전관성 이용>

단위 면적당 질량 = 면밀도 = $\sigma_m = \dfrac{M}{\pi R^2} =$ 일정

중심으로부터 ρ만큼 떨어져있고 폭이 $d\rho$인 미소면적요소의 질량

$dm = \sigma_m 2\pi\rho d\rho$

미소면적요소는 질량이 dm, 반지름이 ρ인 원형고리로 볼 수 있으므로 미소면적요소의 회전관성은 다음과 같다.

$dI = (dm)\rho^2 = \sigma_m 2\pi\rho^3 d\rho$

원판의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^R \sigma_m 2\pi\rho^3 d\rho = \sigma_m 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho$$

$$= \sigma_m 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$

<방법 2 : 원통좌표계(cylindrical coordinates)와 중적분 이용>

중심으로부터 ρ만큼 떨어져있고 X축에서 각도로 φ만큼 떨어져있고 폭이 $d\rho$, $d\varphi$인 미소면적요소의 질량

$dm = \sigma_m (d\rho)(\rho d\varphi) = \sigma_m \rho d\rho d\varphi$

미소면적요소의 회전관성

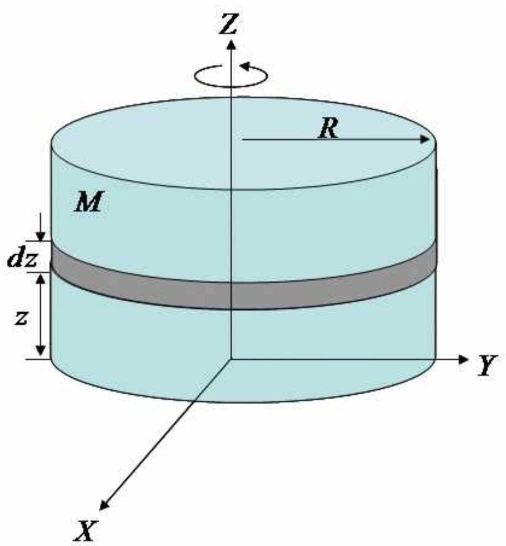
$dI = \rho^2 dm = \sigma_m \rho^3 d\rho d\varphi$

원판의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sigma_m \rho^3 d\rho d\varphi = \sigma_m \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \sigma_m \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}2\pi = \frac{1}{2}MR^2$$

3-3. 원기둥(circular cylinder)의 회전관성



질량 M, 반지름 R, 높이 h

<방법 1 : 원판의 회전관성 이용>

단위 부피당 질량 = 밀도 = $\rho_m = \dfrac{M}{\pi R^2 h} = 일정$

원기둥의 밑면이 XY평면에 있다고 하고, XY평면으로부터 z만큼 떨어져있고 높이가 dz인 미소부피요소의 질량

$dm = \rho_m \pi R^2 dz$

미소부피요소는 질량이 dm, 반지름이 R인 원판으로 볼 수 있으므로 미소부피요소의 회전관성은 다음과 같다.

$dI = \dfrac{1}{2}(dm)R^2 = \dfrac{1}{2}\sigma_m \pi R^4 dz$

원기둥의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^h \frac{1}{2}\sigma_m \pi R^4 dz = \frac{1}{2}\sigma_m \pi R^4 \int_0^h dz$$
$$= \frac{1}{2}\sigma_m \pi R^4 [z]_0^h = \frac{1}{2}\frac{M}{\pi R^2 h}\pi R^4 h = \frac{1}{2}MR^2$$

<방법 2 : 원통좌표계와 3중적분 이용>

중심으로부터 ρ만큼 떨어져있고 X축에서 각도로 φ만큼 떨어져있고 XY평면으로부터 z만큼 떨어져있는 폭이 $d\rho$, $d\varphi$, dz인 미소부피요소의 질량

$dm = \rho_m (d\rho)(\rho d\varphi)(dz) = \rho_m \rho d\rho d\varphi dz$

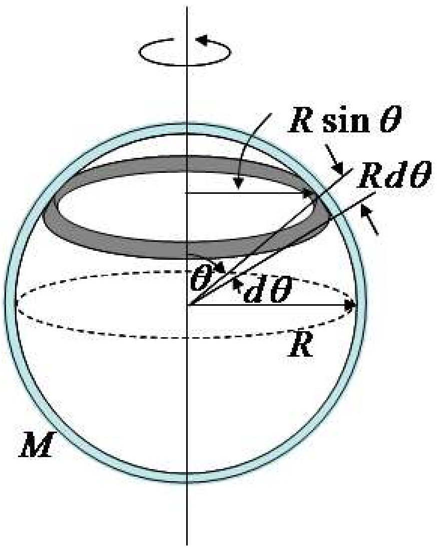
미소부피요소의 회전관성

$dI = \rho^2 dm = \rho_m \rho^3 d\rho d\varphi dz$

원기둥의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho_m \rho^3 d\rho d\varphi dz = \rho_m \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz$$
$$= \rho_m \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^h = \frac{M}{\pi R^2 h}\frac{R^4}{4}2\pi h = \frac{1}{2}MR^2$$

3-4. 속이 비워진 구껍질(spherical shell)의 회전관성



질량 M, 반지름 R

<방법 1 : 원형고리의 회전관성 이용>

단위 면적당 질량 = 면밀도 = $\sigma_m = \dfrac{M}{4\pi R^2}$= 일정

구껍질의 중심이 원점에 있다고 하고, Z축으로부터 각도로 θ만큼 떨어져있고 폭이 $d\theta$, 반지름이 $R\sin\theta$인 미소면적요소의 질량

$$dm = \sigma_m(2\pi R\sin\theta)(Rd\theta) = \sigma_m 2\pi R^2\sin\theta d\theta$$

미소면적요소는 질량이 dm, 반지름이 $R\sin\theta$인 원형고리로 볼 수 있으므로 미소면적요소의 회전관성은 다음과 같다.

$$dI = (dm)(R\sin\theta)^2 = \sigma_m 2\pi R^4\sin^3\theta d\theta$$

속이 비워진 구껍질의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^\pi \sigma_m 2\pi R^4\sin^3\theta d\theta = \sigma_m 2\pi R^4\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$
$$= \sigma_m 2\pi R^4\int_0^\pi (\cos^2\theta - 1)(-\sin\theta)d\theta$$
$$= \sigma_m 2\pi R^4\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^\pi = \frac{M}{4\pi R^2}2\pi R^4\frac{4}{3} = \frac{2}{3}MR^2$$

<방법 2 : 구면좌표계(spherical coordinates)와 중적분 이용>

Z축으로부터 각도로 θ만큼 떨어져있고 X축에서 각도로 φ만큼 떨어져있는 폭이 $d\theta$, $d\varphi$인 미소면적요소의 질량

$$dm = \sigma_m(Rd\theta)(R\sin\theta d\varphi) = \rho_m R^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

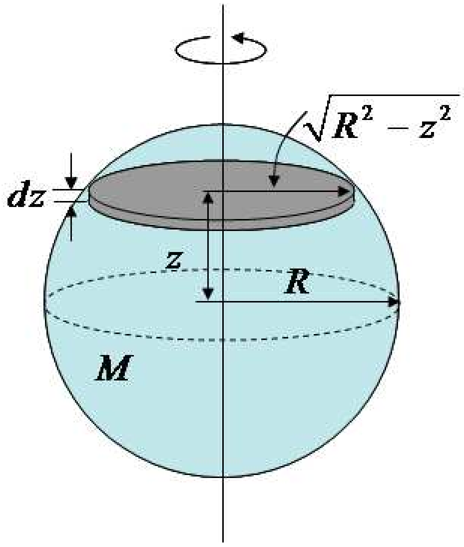
미소부피요소의 회전관성

$$dI = (R\sin\theta)^2 dm = \sigma_m R^4\sin^3\theta d\theta d\varphi$$

속이 비워진 구껍질의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \sigma_m R^4\sin^3\theta d\theta d\varphi$$
$$= \sigma_m R^4\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$
$$= \rho_m R^4\int_0^\pi(\cos^2\theta - 1)(-\sin\theta)d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$
$$= \rho_m R^4\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{M}{4\pi R^2}R^4\frac{4}{3}2\pi = \frac{2}{3}MR^2$$

3-5. 속이 채워진 구(solid sphere)의 회전관성



질량 M, 반지름 R

<방법 1 : 원판의 회전관성 이용>

단위 부피당 질량 = 밀도 = $\rho_m = \dfrac{M}{(4/3)\pi R^3} = \dfrac{3M}{4\pi R^3} =$ 일정

구의 중심이 원점에 있다고 하고, 원점으로부터 z만큼 떨어져있고, 높이가 dz, 반지름이 $\sqrt{R^2 - z^2}$인 미소부피요소의 질량

$dm = \rho_m \pi (R^2 - z^2) dz$

미소부피요소는 질량이 dm, 반지름이 $\sqrt{R^2 - z^2}$인 원판으로 볼 수 있으므로 미소부피요소의 회전관성은 다음과 같다.

$$dI = \frac{1}{2}(dm)(R^2 - z^2) = \frac{1}{2}\rho_m \pi (R^2 - z^2)^2 dz$$

속이 채워진 구의 회전관성

$$I = \int dI = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\rho_m \pi (R^2 - z^2)^2 dz = \rho_m \pi \int_0^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz$$
$$= \rho_m \pi \left[R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{z^5}{5} \right]_0^R = \frac{3M}{4\pi R^3}\pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) R^5$$
$$= \frac{3M}{4\pi R^3}\pi \frac{8}{15} R^5 = \frac{2}{5}MR^2$$

<방법 2 : 구면좌표계와 3중적분 이용>

중심으로부터 r만큼 떨어져있고 Z축으로부터 각도로 θ만큼 떨어져있고 X축에서 각도로 φ만큼 떨어져있는 폭이 dr, $d\theta$, $d\varphi$인 미소부피요소의 질량

$dm = \rho_m (dr)(r d\theta)(r \sin\theta d\varphi) = \rho_m r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

미소부피요소의 회전관성

$dI = (r \sin\theta)^2 dm = \rho_m r^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi$

속이 채워진 구의 회전관성

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho_m r^4 \sin^3\theta dr d\theta d\varphi$$
$$= \rho_m \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$
$$= \rho_m \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1)(-\sin\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$
$$= \rho_m \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^{\pi} [\varphi]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{3M}{4\pi R^3}\frac{R^5}{5}\frac{4}{3}2\pi = \frac{2}{5}MR^2$$